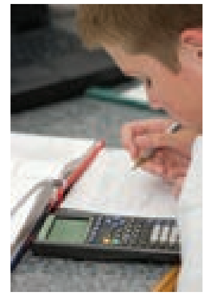
Notas del aula

En esta sección deliberadamente evitamos usar calculadoras. Para comprender plenamente la trigonometría, es esencial que domine los conceptos y sea capaz de ejecutar, *sin la ayuda de una calculadora,* los tipos de cálculos y simplificaciones que hemos estudiado. Los siguientes ejercicios deben resolverse sin recurrir al uso de una calculadora.



8.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

Recomendamos que no use la calculadora para resolver ninguno de los siguientes problemas.

En los problemas 1 a 10, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo θ si θ se encuentra en la posición estándar y el lado terminal de θ contiene el punto dado.

1. $(6, 8)$

2. $(-1, 2)$

3. $(5, -12)$

4. $(-8, -15)$

5. $(0, 2)$

6. $(-3, 0)$

7. $(-2, 3)$

8. $(5, -1)$

9. $(-\sqrt{2}, -1)$

10. $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

En los problemas 11 a 18, encuentre el cuadrante en el que se sitúa el lado terminal de un ángulo θ si θ satisface las condiciones dadas.

11. $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

12. $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

13. $\tan\theta < 0$ y $\sec\theta < 0$

14. $\sec\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$

15. $\cot\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

16. $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

17. $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

18. $\tan\theta < 0$ y $\csc\theta > 0$

En los problemas 19 a 28, se proporciona el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo θ. Con base en el valor dado y la información adicional, determine los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

19. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$, θ está en el cuadrante II

20. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$, θ está en el cuadrante II

21. $\tan\theta = 3$, θ está en el cuadrante III

22. $\cot\theta = 2$, θ está en el cuadrante III

23. $\csc\theta = -10$, θ está en el cuadrante IV

24. $\sec\theta = 3$, θ está en el cuadrante IV

25. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{5}$, $\cos\theta > 0$

26. $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{sen}\theta < 0$

27. $\tan\theta = 8$, $\sec\theta > 0$

28. $\tan\theta = 8$, $\sec\theta > 0$

29. Si $\cos\theta = \frac{3}{10}$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$.

30. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{7}$, encuentre todos los valores posibles de $\cos\theta$.

31. Si $2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 0$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

32. Si $\cot\theta = \frac{3}{4}$, encuentre todos los valores posibles de $\csc\theta$.

33. Si $\sec\theta = -5$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

34. Si $3\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$, encuentre todos los valores posibles de $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$.

35. Complete la tabla siguiente.

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$			
150°	$5\pi/6$			
180°	π			
210°	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225°	$5\pi/4$			
240°	$4\pi/3$			
270°	$3\pi/2$			
300°	$5\pi/3$			
315°	$7\pi/4$			
330°	$11\pi/6$			
360°	2π			

36. Complete la tabla siguiente.

θ (grados)	θ (radianes)	csc θ	sec θ	cot θ
0°	0	—	1	—
30°	$\pi/6$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\pi/3$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$
90°	$\pi/2$	1	—	0
120°	$2\pi/3$			
135°	$3\pi/4$			
150°	$5\pi/6$			
180°	π			
210°	$7\pi/6$			
225°	$5\pi/4$			
240°	$4\pi/3$			
270°	$3\pi/2$			
300°	$5\pi/3$			
315°	$7\pi/4$			
330°	$11\pi/6$			
360°	2π			

En los problemas 37 a 52, obtenga el valor exacto de la expresión dada.

37. $\cos 5\pi$

38. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

39. $\cot\frac{13\pi}{6}$

40. $\tan\frac{9\pi}{2}$

41. $\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

42. $\cos\frac{23\pi}{4}$

43. $\csc\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

44. $\tan\frac{23\pi}{4}$

45. $\sec(-120°)$

46. $\csc 495°$

47. $\operatorname{sen} 150°$

48. $\cos(-45°)$

49. $\tan 405°$

50. $\operatorname{sen} 315°$

51. $\cot(-720°)$

52. $\sec(-300°)$

En los problemas 53 a 58, obtenga todos los ángulos θ, donde $0 \leq \theta < 360°$, que satisfagan la condición dada.

53. $\tan\theta = \sqrt{3}$

54. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$

55. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

56. $\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

57. $\csc\theta = -1$

58. $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

En los problemas 59 a 64, obtenga todos los ángulos θ, donde $0 \leq \theta < 2\pi$, que satisfagan la condición dada.

59. $\operatorname{sen}\theta = 0$

60. $\cos\theta = -1$

61. $\sec\theta = -\sqrt{2}$

62. $\csc\theta = 2$

63. $\cot\theta = -\sqrt{3}$

64. $\tan\theta = 1$

Aplicaciones diversas

65. Tiro libre En ciertas condiciones, la altura máxima y que alcanza un balón de basquetbol lanzado desde una altura h a un ángulo α medido desde la horizontal, con velocidad inicial v_0 está dada por

$$y = h + (v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha)/2g,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule la máxima altura que alcanza un tiro libre si $h = 2.15$ m, $v_0 = 8$ m/s, $\alpha = 64.47°$ y $g = 9.81$ m/s^2.

Tiro libre

66. Lanzamiento de bala El rango de una bala lanzada desde una altura h sobre el nivel del suelo, con velocidad inicial v_0 en ángulo θ con respecto a la horizontal se puede aproximar con

$$R = \frac{v_0\cos\phi}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\phi + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\phi + 2gh}\right),$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad.

a) Si $v_0 = 13.7$ m/s, $\phi = 40°$ y $g = 9.81$ m/s^2, compare los rangos logrados por las alturas de lanzamiento $h = 2.0$ m y $h = 2.4$ m.

b) Explique por qué un incremento de h produce incremento de R si los demás parámetros se mantienen fijos.

c) ¿Qué implica esto sobre la ventaja que la altura le da a un lanzador de bala?

67. Aceleración debida a la gravedad Debido a su rotación, la Tierra se ensancha en el ecuador y se aplana en los polos. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad varía dependiendo de la latitud θ. Los estudios satelitales han demostrado que la aceleración debida a la gravedad g_{sat} se puede aproximar con la función

$$g_{sat} = 978.0309 + 5.18552 \operatorname{sen}^2\theta - 0.00570 \operatorname{sen}^2 2\theta.$$

a) Calcule g_{sat} en el ecuador ($\theta = 0°$),

b) en el polo norte, y

c) a 45° latitud norte.

Para la discusión

68. ¿Existe un ángulo θ tal que $\cos\theta = \frac{4}{3}$? Explique.

69. ¿Existe un ángulo θ tal que $2\csc\theta = 1$? Explique.

70. Explique cómo es posible determinar, sin la ayuda de una calculadora, que tanto sen 4 como cos 4 son negativos.

71. Sea L una recta no vertical que pasa por el origen y forma un ángulo θ medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde el eje x positivo. Pruebe que la pendiente m de la recta L es $\tan\theta$ (**FIGURA 8.4.12**).

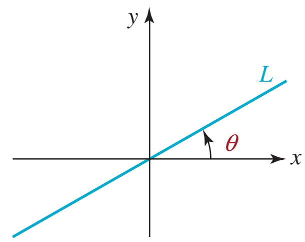


FIGURA 8.4.12 Recta que pasa por el origen del problema 71

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Lado inicial de un ángulo
Lado terminal de un ángulo
Posición estándar de un ángulo
Ángulos coterminales
Minutos
Segundos
Medida en grados de un ángulo
Ángulo central
Medida en radianes de un ángulo
Ángulo agudo
Ángulos complementarios
Ángulo obtuso
Ángulo llano

Ángulo cuadrantal
Ángulos suplementarios
Ángulo recto
Longitud de arco
Conversión:
- grados a radianes
- radianes a grados

Ángulo de referencia
Triángulos rectángulos:
- cateto adyacente
- cateto opuesto
- hipotenusa

Funciones trigonométricas:
- de ángulos agudos
- de ángulos generales

Identidades por cociente
Identidades recíprocas
Identidades pitagóricas
Cofunciones
Identidades de cofunción

CAPÍTULO 8 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 10, responda verdadero o falso.

1. $\operatorname{sen}(\pi/6) = \cos(\pi/3)$. __________

2. $\operatorname{sen}(\pi/2) = \operatorname{sen}(5\pi/2)$. __________

3. $\operatorname{sen}\frac{1}{2} = 30°$. __________

4. $\tan\pi = 0$. __________

5. $|\csc\theta| \leq 1$. __________

6. $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2(90° - \theta) = 1$. __________

7. Los ángulos de 120° y −240° son coterminales. _______

8. Si $\tan\theta = \frac{2}{5}$, entonces $\operatorname{sen}\theta = 2$ y $\cos\theta = 5$. __________

9. Si $\sec\theta = \sqrt{7}$, entonces $\cos\theta = \sqrt{7}/7$. __________

10. 30′ es equivalente a 0.5°. __________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

1. El complemento del ángulo agudo de 23° es _________.

2. Un ángulo de 1° en posición estándar está formado por _________ de una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj de su lado terminal.

3. Un ángulo en posición estándar que tiene medida negativa se formó por una _________ rotación de su lado terminal.

4. El ángulo central θ de un círculo cuyo radio mide 8 pulgadas subtiende un arco de 12 pulgadas; la medida del ángulo θ en radianes es _________.

5. Si θ es un ángulo agudo medido en grados tal que $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$, entonces el valor exacto de $3\cos(90° - \theta) =$ _________.

6. sec 51°/csc 49° = ________.

7. Si θ es un ángulo agudo medido en grados tal que cot θ = 2, entonces el valor exacto de cot θ + cot(90° − θ) = ________.

8. Si θ es un ángulo agudo tal que tan $\theta = \sqrt{3}$, entonces θ = ________.

9. El ángulo de referencia de $4\pi/3$ es ________.

10. π radianes = ________ grados.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, dibuje el ángulo dado en posición estándar.

1. $-5\pi/6$
2. $7\pi/3$
3. 225°
4. −450°

En los problemas 5 a 8, convierta el ángulo dado a radianes.

5. −120°
6. 1°
7. 48.3°
8. 14°14′

En los problemas 9 a 12, convierta el ángulo dado a grados decimales.

9. $\pi/9$
10. 78°15′
11. 2.3
12. $7\pi/3$

En los problemas 13 a 16, convierta el ángulo dado a grados, minutos y segundos.

13. 70.5°
14. 170.15°
15. 3.1
16. $\pi/10$

En los problemas 17 y 18, encuentre dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

17. 85°
18. $7\pi/6$

En los problemas 19 a 22, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo θ si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ contiene el punto dado.

19. $(-1, 2)$
20. $(4, 7)$
21. $(-0.5, -0.3)$
22. $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$

En los problemas 23 a 28, se proporciona el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo θ. Con base en el valor dado y la información adicional, determine los valores de cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

23. $\cos\theta = -\frac{1}{7}$, θ está en el cuadrante III.
24. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$, θ está en el cuadrante II.
25. $\cot\theta = -5$, θ está en el cuadrante IV.
26. $\sec\theta = 15$, $\operatorname{sen}\theta < 0$
27. $\csc\theta = -7$, $\tan\theta > 0$
28. $\tan\theta = \frac{1}{9}$, $\sec\theta < 0$
29. Si $\cot\theta = -4$, encuentre todos los valores posibles de sen θ, cos θ, tan θ, sec θ y csc θ.
30. Si $4\operatorname{sen}\theta = 3\cos\theta$, encuentre todos los valores posibles de sen θ, cos θ, tan θ, sec θ y csc θ.

En los problemas 31 a 34, encuentre el valor exacto de la expresión dada. No use la calculadora.

31. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
32. $\csc\frac{13\pi}{6}$
33. tan 495°
34. sen 330°

En los problemas 35 a 38, encuentre todos los ángulos θ, si $0° \le \theta < 360°$, que satisfagan la condición dada. No use la calculadora.

35. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
36. $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
37. $\sec\theta = -2$
38. $\csc\theta = -\sqrt{2}$

En los problemas 39 a 42, encuentre todos los ángulos θ, si $0 \le \theta < 2\pi$, que satisfagan la ecuación dada. No use la calculadora.

39. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
40. $\csc\theta = -1$
41. $\cot\theta = -1$
42. $\cos\theta = \frac{1}{2}$